LA METHODE M.P.M., METHODE DES POTENTIELS METRA

1. Introduction

Supposons que nous ayons à réaliser la recette de l’Aigo boulido (ancienne recette du “ petit peuple ” méditerranéen). À chacune des tâches élémentaires ou “ étapes ” de réalisation de la recette, nous associons une lettre code (*indiquée ci-dessous entre parenthèses*) et le temps nécessaire à son accomplissement. Bien évidemment la réalisation d’une telle recette ne nécessite pas un travail d’organisation si complexe qu’il faille mettre en œuvre une méthode d’ordonnancement aussi formalisée et mathématisée que celle que nous allons étudier… il ne s’agit là que d’un exemple pédagogique.

Aigo boulido, recette pour 4 personnes

Denrées : 6 gousses d’ail, 3 cuillerées à soupe d’huile, 1 feuille de laurier, 1 branche de sauge, 2 œufs, 4 tranches fines de pain rassis, sel.

1. Mettre 1 litre ½ d’eau dans une casserole avec du laurier, de la sauge, du sel, et porter à ébullition (A, 5 mn).
2. Éplucher de l’ail, le hacher, le mettre dans un mortier (B, 5 mn).
3. Ajouter de l’huile d’olive dans le mortier et piler (C, 3 mn).
4. Verser ce mélange dans l’eau bouillante et cuire à feu vif pendant 10 mn (D, 10 mn).
5. Faire chauffer une soupière et mettre des tranches de pain rassis au fond (E, 5 mn).
6. Casser des œufs en séparant le blanc et le jaune, mettre les jaunes dans un bol (F, ½ mn).
7. Passer le bouillon au chinois (G, ½ mn).
8. Verser une louche de bouillon sur les jaunes d’œufs et remuer vivement (H, ½ mn)
9. Reverser cette préparation dans le bouillon en battant au fouet (I, 1mn).
10. Verser une louche de bouillon dans la soupière, laisser le pain s’imprégner, servir chaud (J, 2 mn).

Pour une appréhension des généralités sur l’application de cette méthode, nous vous recommandons de lire dans le site l’article sur les termes clés des méthodes Pert, Gantt et Pmp.

2. Tableau d’analyse d’un projet et graphe M.P.M.

La réalisation d’un graphe présentant l’analyse d’un problème d’ordonnancement nécessite une étude préalable des diverses tâches à considérer, de leur durée (déterminée ou aléatoire), et des relations entre les tâches (principalement les contraintes d’antériorité). Cette analyse est décrite dans la fiche sur le diagramme PERT.

Habituellement, les conclusions de cette étude font l'objet d'une synthèse sous la forme d'un tableau. À titre d'exemple voici le tableau correspondant à la réalisation de la recette de l'Aigo boulido :

Tâches	Opérations préalables	Durées en minutes
A		5
B		5
C	B	3
D	A, C	10
E		5
F		0,5
G	D	0,5
H	F, G	0,5
I	H	1
J	E, I	2

On pourrait aussi présenter un tableau dans lequel figureraient tous les antécédents (opérations préalables) et non les **seuls antécédents immédiats** comme cela est le cas ici

Sur la base de ce tableau on trace le graphe M.P.M., en utilisant la symbolique vue plus haut, graphe dans lequel :

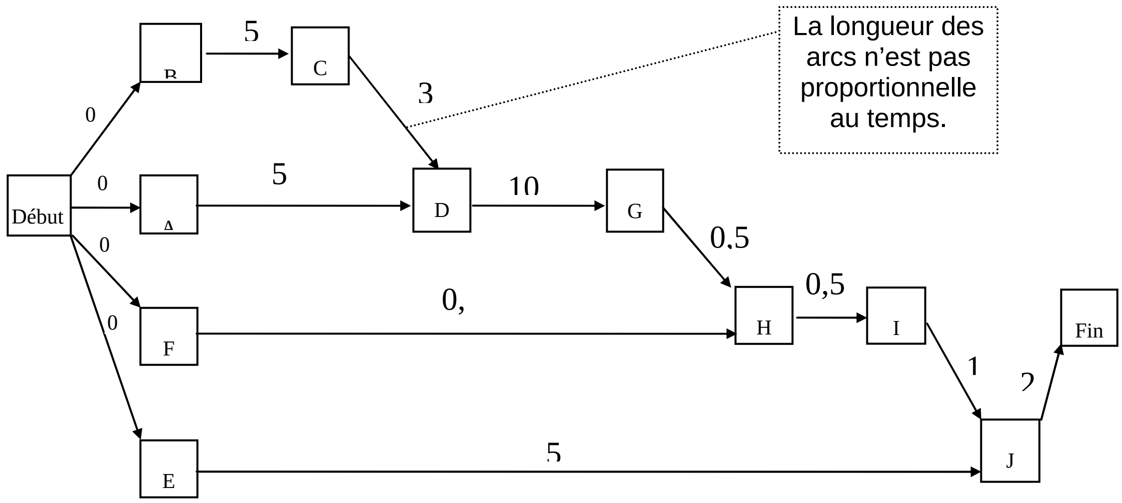
1. Chaque opération est représentée par un " sommet ", habituellement dessiné sous la forme d'un rectangle dans lequel on inscrit le numéro ou la lettre code de l'opération. Le plus clair est de considérer que le sommet A représente **le début de l'opération A**, que le sommet B représente le début de l'opération B et ainsi de suite.

2. Chaque arc représente une contrainte de succession et l'on inscrit sur cet arc une valeur numérique, appelée **potentiel**, qui est le délai minimum, après le début de la tâche notée à l'extrémité initiale de l'arc, au bout duquel peut démarrer la tâche notée à l'extrémité finale de l'arc. Ici nous avons considéré que la durée d'exécution d'une tâche était en même temps le délai minimum avant de pouvoir lancer la tâche qui lui est immédiatement postérieure ; mais il n'en n'est pas toujours ainsi.

3. On introduit une opération initiale notée 0 ou 1 ou Début qui correspond au début du travail.

4. On introduit une opération finale ou terminale notée " n " ou Fin qui correspond à l'achèvement du travail.

Le graphe associé au tableau de l'Aigo boulido est le suivant :

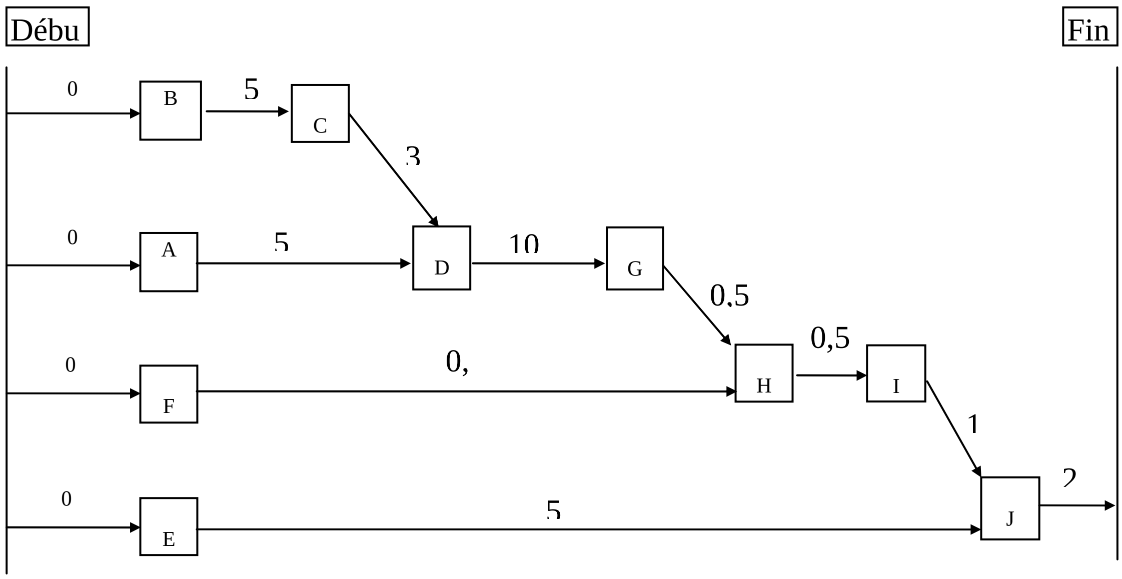


3. Construction du graphe : précisions

3.1. Présentation

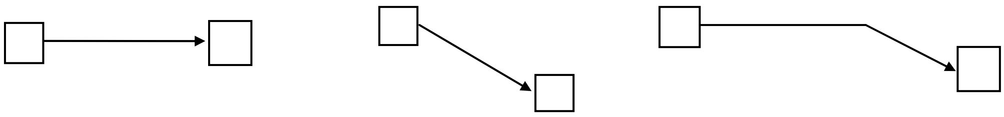
3.1.1. Sommet initial et sommet final

Il est souvent plus commode et plus esthétique de remplacer ces deux sommets par des segments de droite verticaux. On évite ainsi les surcharges lorsque de nombreux arcs sont incidents à ces sommets.

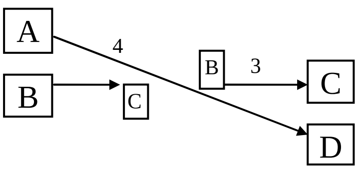


3.1.2. Arcs

Le mieux est de tracer des arcs rectilignes ou en lignes polygonales. Par exemple :



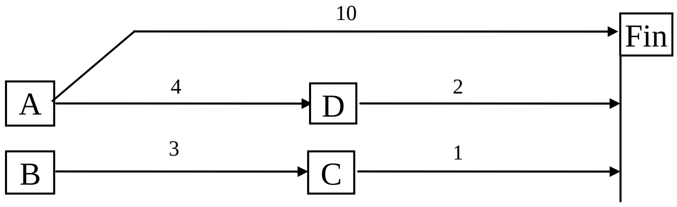
Si l'on ne peut éviter les intersections d'arcs, la solution suivante est souvent la plus claire :



(A, B, C, D ne sont ici que pour fixer les idées et ne correspondent pas à l'exemple de l'Aigo boulido)

On rappelle que le potentiel attaché à un arc est un délai minimum à respecter : par exemple pour l'arc (A, D) le potentiel égal à 4 signifie que D peut débuter au mieux 4 unités de temps après le début de A, mais cela ne signifie pas que A dure nécessairement 4 unités de temps.

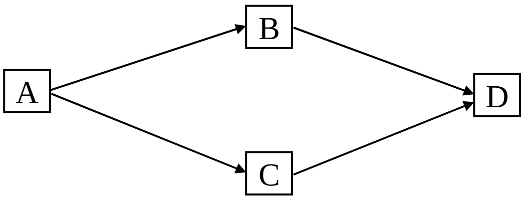
Ce qui peut poser problème : supposons, de plus, que A dure 10 unités de temps, B 3, C 1, D 2 et que ce soient les seules tâches du programme. Il faut penser à rajouter un arc de potentiel 10.



3.2. Cas complexes

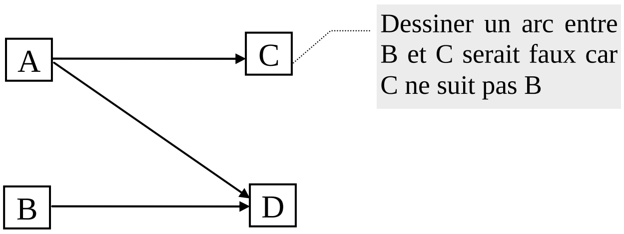
3.2.1. Opérations parallèles

Soient A, B, C, D quatre opérations. On suppose que B et C succèdent toutes deux à A et précèdent toutes deux D. On suppose de plus que B et C sont des opérations qui, en fonction de leurs durées respectives et des délais dont on dispose, se déroulent ou doivent pouvoir se dérouler simultanément. La représentation est la suivante :



3.2.2. Dépendance et indépendance entre opérations

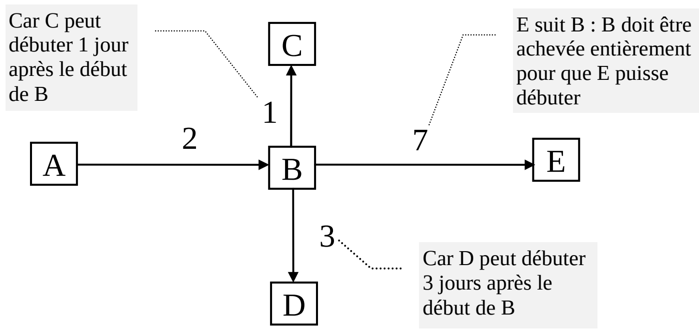
Soient quatres opérations A, B, C, D. On suppose que A précède C et que A et B, indépendantes -c'est-à-dire sans contraintes de succession entre elles-, précèdent D. On peut dire autrement que C succède à A (mais sans succéder à B) et que D succède à A et simultanément à B. Alors on a :



3.2.3. Successions avec recouvrement ou opérations composées

Soient cinq opérations A, B, C, D, E de durées, en jours, respectives 2, 7, 3, 4, 2. A précède B. C peut débuter 1 jour après le début de B ; D peut débuter 3 jours après le début de B et E suit B, c'est-à-dire ne peut débuter qu'après l'achèvement de B.

C'est en jouant sur les potentiels des arcs qu'il est possible de proposer une représentation graphique juste :



Ainsi tient-on compte des contraintes de succession avec recouvrement (ou avec attente) en utilisant simplement des potentiels convenables.

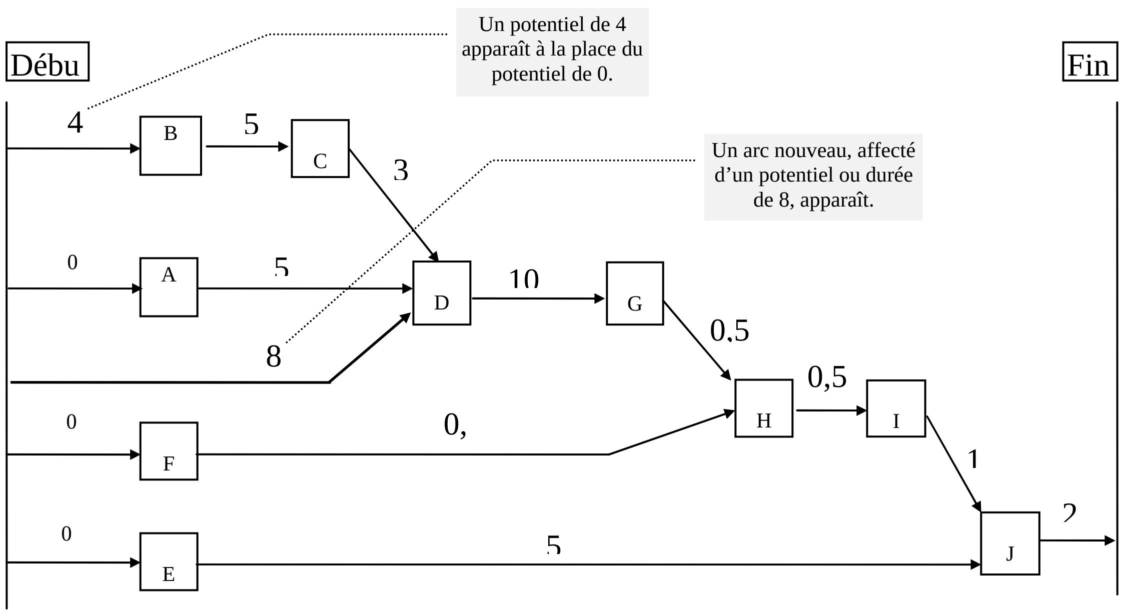
Cet exemple et les précédents, comme certains commentaires ont été pris dans le livre de Ferret et Langlois, “ mathématiques appliquées, opérations financières, initiation à la R.O. ” aux éditions Foucher, Paris 1979.

3.2.4. Cas de conditions limites de démarrage

Supposons qu'en ce qui concerne la recette de l'Aigo boulido :

- la tâche B ne puisse débuter au mieux que 4 minutes après le début de la réalisation de la recette,
- la tâche D ne puisse débuter au mieux que 8 minutes après le début de la réalisation de la recette.

Le graphe se trouverait ainsi modifié :



4. Calculs sur le graphe : dates, marges et chemin critique

4.1. Durée minimale de réalisation d'un programme : chemin critique

Lorsqu'on observe un graphe entre le sommet de début et celui de fin on voit qu'il est généralement possible d'emprunter divers chemins pour relier le début à la fin. Chaque chemin est matérialisé par une succession de sommets et d'arcs et correspond à une certaine succession de tâches. La réalisation successive des diverses tâches qui jalonnent un chemin donné a une durée totale qui dépend des durées de réalisation de chacune des tâches du chemin. Cette durée totale est appelée " longueur au sens des durées du chemin ", en abrégé : longueur du chemin.

La durée minimale de réalisation d'un programme est donnée par la longueur du chemin le plus long, c'est-à-dire par la succession de tâches la plus défavorable en ce qui concerne la durée. En effet la durée minimum ne peut être inférieure à la somme des durées nécessaires pour parcourir la succession la plus défavorable au sens des durées.

Le chemin le plus long est appelé chemin critique. Il arrive qu'il existe plusieurs chemins critiques qui ont évidemment tous la même longueur. Les sommets qui jalonnent le chemin critique sont les tâches critiques.

La longueur du chemin critique donne la durée minimale de réalisation du programme.

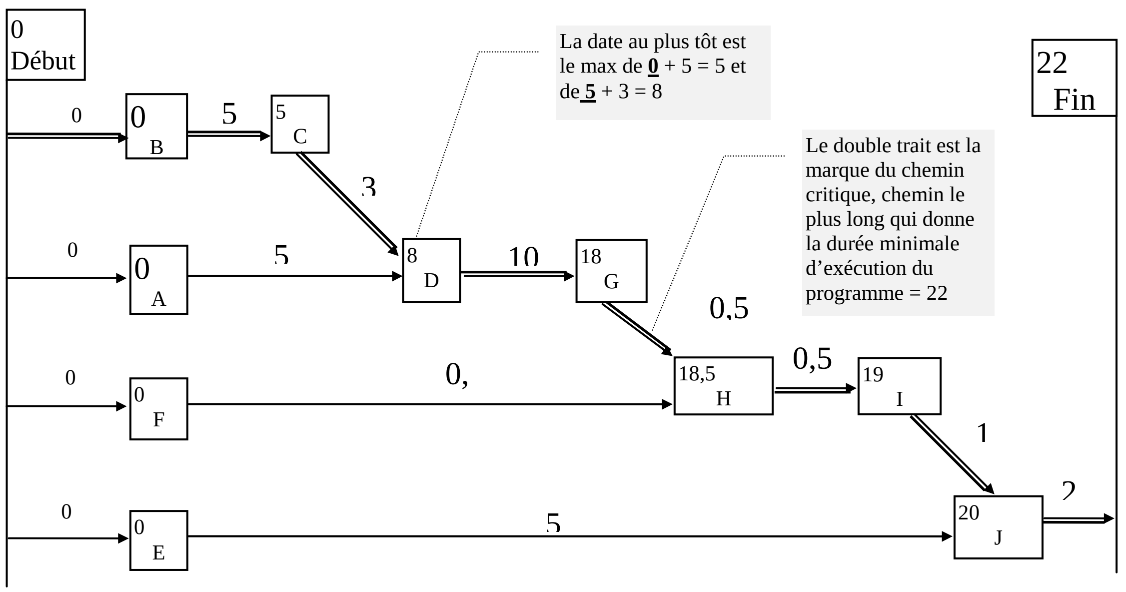
Tout retard pris dans le lancement ou l'exécution d'une tâche critique augmente d'autant la durée minimum de réalisation du programme.

4.2. Dates relatives aux tâches

Soient :
- T début = 0 la date de début du programme.
- Début, a, b, c..., i..., n les indices désignant les sommets : Début, A, B, C..., I..., Fin
- Ti la <u>date au plus tôt</u> de début de la tâche I.
- d(h,i) le potentiel de l'arc reliant la tâche H à la tâche immédiatement postérieure I, c'est-à-dire le délai minimum séparant le début de H du début de I avec H< I
- P(i) l'ensemble des précédents de I, c'est-à-dire l'ensemble des sommets (tâches) précédant le sommet I.

Alors: **Ti = Max [Th + d(h,i)] avec H $\in$ P(i)**

L'ordonnancement au plus tôt est le suivant :



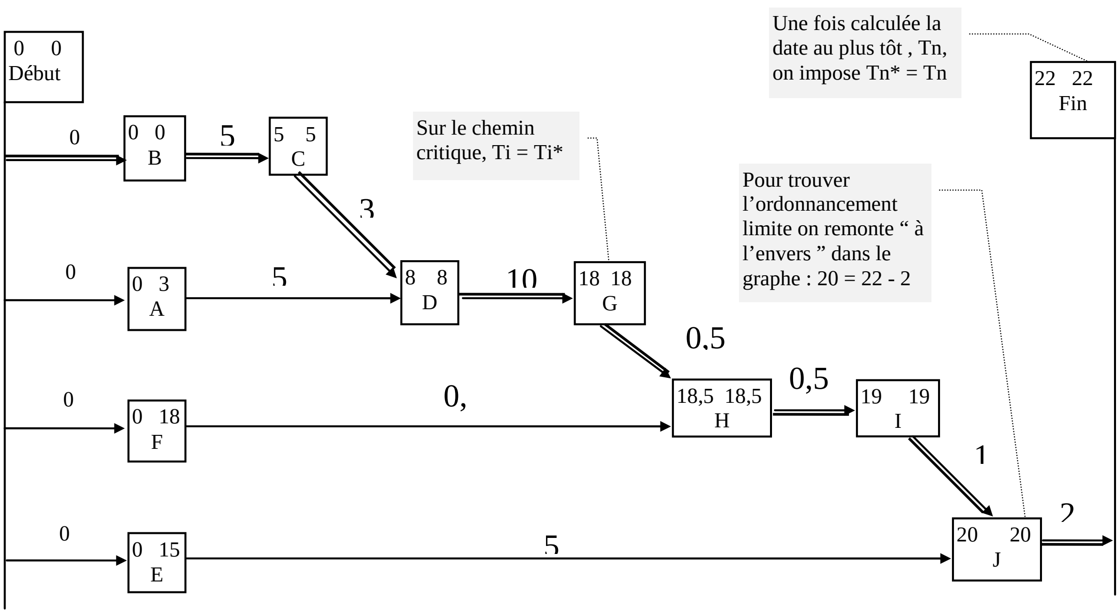
Après avoir calculé les dates au plus tôt de début des tâches il est utile de s'intéresser aux <u>dates au plus tard</u> de début de ces mêmes tâches afin de connaître le retard maximum qu'il serait possible d'apporter au commencement d'une tâche sans remettre pour autant en question la date au plus tôt d'achèvement du travail (ici 22 minutes). A cette fin on décide que la date au plus tard d'achèvement du travail doit être égale à sa date au plus tôt.

Soient :

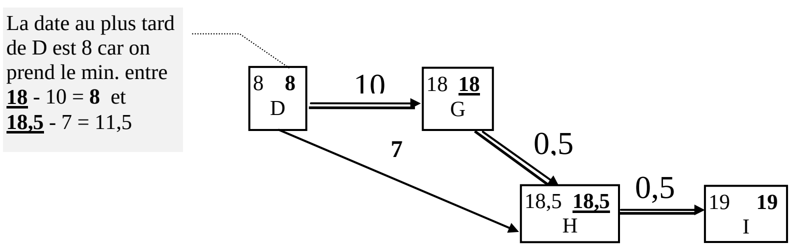
- Ti* <u>la date au plus tard</u> de début de la tâche I. On fixe Tn* = Tn (ici Tn* = Tn = 22).
- d(i,j) le potentiel de l'arc reliant I à J avec I < J (J succède immédiatement à I).
- S(i) l'ensemble des tâches succédant immédiatement à la tâche I.

Alors: **Ti* = min [Tj* - d(i,j)] avec J $\in$ S(i)**

Sur le chemin critique Ti = Ti*. De même que l'ensemble des Ti est appelé ordonnancement au plus tôt ou ordonnancement minimum, l'ensemble des Ti* donne <u>l'ordonnancement au plus tard</u> ou ordonnancement limite. Le graphe est maintenant le suivant :



Supposons que pour une autre recette proche de l'Aigo boulido les contraintes soient modifiées : on admet que l'opération H ne suive plus F et que H puisse commencer 7 minutes après le début de D. Le graphe partiel de cette recette serait le suivant :



4.3. Marges relatives aux tâches

Pour une opération I donnée, identifiée par l'indice i, trois marges sont calculées :
. MTi qui est la marge totale de l'opération,
. MLi qui est la marge libre de l'opération,
. MCi qui est la marge certaine de l'opération.

Marge totale : MTi = Ti* - Ti

MTi est le délai ou retard maximum que l'on peut apporter à la mise en route de I sans modifier la durée minimale de réalisation du programme. Bien évidemment si MTi est utilisée les dates au plus tôt et les marges des opérations suivantes seront recalculées.

Marge libre : MLi = min [Tj - Ti - d(i,j)] avec **j** $\in$ **S(i)**

Il faudra prendre la plus petite des valeurs trouvées en appliquant la formule qui figure dans les crochets

Dates au plus tôt successives des opérations succédant immédiatement à I

Date au plus tôt de I

Potentiels successifs entre I et les opérations succédant immédiatement à I (délais entre le début de I et le début des diverses opérations succédant immédiatement à I)

Ensemble des tâches succédant immédiatement à I

MLi est le délai ou retard maximum (<u>retard par rapport à **Ti**</u>) que l'on peut apporter à la mise en route de I sans remettre en question les dates au plus tôt des opérations ultérieures.

Marge certaine : MCi = Max [0 ou de **min[Tj - Ti* - d(i,j)]]** avec **j** $\in$ **S(i)**

Si min [...] est < 0 il faut prendre la valeur 0

Il faudra prendre la plus petite des valeurs trouvées en appliquant la formule qui figure dans les crochets

Dates au plus tôt successives des opérations succédant immédiatement à I

Date au plus tard de I

Ensemble des tâches succédant immédiatement à I

Potentiels successifs entre I et les opérations succédant immédiatement à I (délais entre le début de I et le début des diverses opérations succédant immédiatement à I)

MCi est le délai ou retard maximum (<u>retard par rapport à **Ti***</u>) que l'on peut apporter à la mise en route de I sans remettre en question les dates au plus tôt des opérations ultérieures et cela bien que l'opération I ait commencé à sa date au plus tard. Mci est particulièrement intéressante puisqu'elle permet de "recaler" un ordonnancement sur les dates attendues (dates au plus tôt) tout en disposant tout de même d'un délai pour lancer une tâche alors même que cette tâche avait été "calée" par des retards antérieurs sur sa date au plus tard. Il est rare de disposer d'une marge certaine.

Les marges sont en général portées sur le graphe en dessous ou en dessus des rectangles matérialisant les sommets et dans l'ordre MTi, MLi, MCi. On a d'ailleurs toujours MTi $\geq$ MLi $\geq$ MCi $\geq$ 0.

Pour l'Aigo boulido seules les opérations A, F, E, ont des marges : pour A [3 ; 3 ; 0], pour F [18 ; 18 ; 0] et pour E [15 ; 15 ; 0].

Sur le chemin critique toutes les marges sont nulles. Il en résulte que l'élasticité d'un programme est d'autant plus faible que le nombre de tâches critiques est important par rapport au nombre total de tâches et que les diverses marges des opérations non critiques sont faibles ou inexistantes.